741. 大數ノ法則 II

北川　敏男（阪大）

§2. 豫備的ナ考察（續キ）　前回ノ§デハ，適當ナ條件ノモトニ於テハ，必ズシモ"相互ニ独立"デナクトモ，等式(1)ガ成立ツコトヲ示シタ。$E\{S_n^2\}=E\{X_1^2\}+\cdots\cdots+E\{X_n^2\}$ ハnト共ニ增加スル一方デアルカラ、前記a, b, c, d ノ何レカガ成リ立テバ，聯鎖ナ確率変数ノ和ニ關シテモ，相互ニ独立ナ確率変数ノ和ト同樣ニ標準偏差增加ノ原理ガ成立ツコトニナル。

然ラバ，散縮度（*dispersion*）ニ關シテハ如何。コレヲ次ニ論ズル。

〔2〕 散縮度增加ノ原理　先ヅ準備トシテ條件付確率（*conditional prob.*）ニ關シテ若干ノ事項ヲ述ベル。一般ニ，事象 A, B ガ共ニ起ル確率ヲ $Pr.\{A, B\}$ デ示ス。Aナル事象ト $\mathfrak{X}<x$ ナル事象トガ同時ニ起ル確率 $Pr\{A, \mathfrak{X}<x\}$ ヲ考ヘル，コレハ x ノ函數ダカラ $F_1(x)$ デ表ハス。然ルトキ $a\leqq\mathfrak{X}<b$ ナル條件ノモトデ A ノ起ル確率ハ $\{F_1(b)-F_1(a)\}/\{F(b)-F(a)\}$ デアッテ、ソノ値ハ $\geqq 0$ デ且ツ $\leqq 1$ デアル。（但シ $\mathfrak{X}$ ノ分布函數ヲFトシタ）従ッテ

$$(3)\quad Pr.\{A, \mathfrak{X}<x\}=\int_{-\infty}^{x-0} g_A(x)\,dF(x)$$

トナル如キ $g_A(x)$ ガ存在スル。今特ニAヲバ，或ル確率変

数 Υ ガ $<y$ トナル事象トシ，

$\Pr.\{A, \mathfrak{X}<x\} \equiv \Pr.\{\Upsilon<y, \mathfrak{X}<x\}$ ヲバ $F(x, y)$，上ノ $g_A(x)$ ヲバ $G(x, y)$ デ表ハスト，(3) 式ハ次ノ如ク書キ改メラレル：

$$(3') \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x-0} G(z, y)\, dF(\alpha)$$

コレカラ、聯鎖ナ確率変数ノ和ノ散縮度増加ノ原理トモ見做サレルベキ次ノ結果ニ達スル。

<u>定理 1.</u> $\mathfrak{X}$ ヲ知レトキニ，Υ ノ従フ條件付確率法則ノ散縮度ガ，$\mathfrak{X}$ ノ値ニ無関係ナ常数デ下カラ抑ヘラレルトキニハ，$\mathfrak{X}+\Upsilon$ ノ（先験的）確率法則ノ散縮度モ；コノ常数デ下カラ抑ヘラレル。[1]

注意： $\mathfrak{X}+\Upsilon$ ノ先験的確率法則ノ分布函数ヲ $\mathfrak{F}$ デ表ハサウ。散縮度ノ逆函数タル濃度函数ニツイテ云ヘバ，上ノ定理ノ主張スルコトハ；任意ノ $l>0$ ニ對シテ

$$(4) \qquad \underset{-\infty<s<\infty}{l.\,u.\,b.} \{\mathfrak{F}(s+l)-\mathfrak{F}(s-0)\}$$

$$\leqq \underset{-\infty<u,\, y<\infty}{l.\,u.\,b.} \{G(u, y+l)-G(u, y-0)\}$$

而シテ、$\mathfrak{F}(s)$, $G(u, y)$ ハ夫々 s, y ニ関シテ分布函数デ，一般ノ規約ニ依リ上ニ（従ッテ右ニ）半連続トシテオ

---

(1) P. Lévy: *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînés.* Bull. Scien. Math. LIX (1935) コレヲ〔L_1〕デ示ス。

クト，(4) ノ l.u.b. ハ Max. デ置キカヘテヨイ。

定理 I ノ証明：

$$\mathcal{F}(s)=\int_{x+y<s} d_{x,y}F(x,y)=\int_{x+y<s} d_{x,y}\left[\int_{-\infty}^{x-0} G(u,y)\,dF(u)\right]$$

デアルカラ、積分変数ノ変換ニ依リ，コレハ

$$\int_{-\infty}^{s} dy\left\{\int_{-\infty}^{s-y-0} G(u,y)\,dF(u)\right\}$$

ニ等シク、従ッテ

$$\mathcal{F}(s+l)-\mathcal{F}(s)=\int_{-\infty}^{s} dy\left\{\int_{-\infty}^{s-y}\left(G(u,y+l)-G(u,y)\right)dF(u)\right\}$$

(4) ハコノ式カラ導カレル。[2]

〔3〕 Kolmogoroff ノ不等式ノ拡張.

Kolmogoroff[3] ハ Math. Ann. 99 ニ於テ相互ニ独立ナ確率変数 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ノ和 $S_k = X_1+\cdots+X_k$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニ関シテ $E(X_\nu)=0$, $E(X_\nu^2)=\sigma_\nu^2$ トスルトキ，$T=\underset{1\leqq k\leqq n}{Max}|S_k|$ ト置クトキ

$$(5)\quad Pr.\left[T \geqq a\right] \leqq \frac{1}{a^2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2\right)$$

ヲ示シタ。ソレハ，独立級数ノ収斂スル確率ヲ計算スルトキ，有效ナ不等式デアッタ。コレヲ適當ナ條件ノモトニ於テ聯鎖ノ場合ニモ拡張出来ナイカ。コレニ関シテ

---

(2) 実際ハコレカラ多少手間ガカヽル.

(3) Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.

定理2. (聯鎖ナ)確率変數ノ系列 $\{X_\nu\}$ ニ於テ、次ノ三條件ガ満足サレテ居ルトスル。

(C) $E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0 \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$

(6) $E\{X_\nu^2\}<\infty \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$

(7) $$E\{S^2\}\equiv E\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}X_\nu\right)^2\right\}\equiv b<\infty$$

然ルトキニハ

(8) $$T=\max_{1\leqq\nu<\infty}|S_\nu|$$

ニ依ツテ確率変數 T ヲ定義スレバ；任意ノ $c>0$ ニ對シテ

(9) $$Pr.\{T>cb\}<\frac{1}{c^2}.$$

注意1: $E\{X_\nu^2\}$ ガ有限ナコトカラ、$E_p\{X_\nu^2\}$(即チ、$X_1, X_2\cdots\cdots, X_p$ ノ値ヲ知ツテノ X_ν^2 ノ平均値，コレハ，$(X_1, X_2,\cdots\cdots, X_p)$ ニ與ヘル値ニ依ツテ変リ得ル確率変數デアル)モ亦，確率0ノ場合ヲノゾイテ有限デアル。コレハ一般ニ，$n<N$ ナラバ

(10) $$Pr_n\{E\}=E_n\{Pr_N\{E\}\},\quad E_n\{X\}=E_n\{E_N\{X\}\}$$

トナルコトカラ明ラカデアル。($E\{X_\nu^2\}\equiv E_0\{X_\nu^2\}$ ニ外ナラヌ)

注意2: 條件(C)ノモトニ於テハ

(11) $$E_p\{S_n^2\}=E_p\{S_{n-1}^2\}+2E_p\{S_{n-1}E_{n-1}\{X_n\}\}+E_p\{X_n^2\}$$

$$= E_p\left\{S_{n-1}^2\right\} + E_p\left\{X_n^2\right\}$$

定理２ノ證明：　今茲ニ

(12) $$T_n = \underset{1 \leqq \nu \leqq n}{Max}\left|S_\nu\right|$$

ト置ク。E'_ν ハ，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_\nu$ ニ對シテハ，次ノ事象（E_ν）ガ起ツタト假定シタ場合ノ，或ル確率変数ノ平均値ヲ意味スルトスル：

(13) $$T_{\nu-1} \leqq c\,b, \qquad |S_\nu| > c\,b$$

然ルトキニハ

$$E'_\nu\left\{S^2\right\} = E'_\nu\left\{S_\nu^2\right\} + \sum_{p=\nu+1}^{\infty} E'_\nu\left\{X_p^2\right\} \geqq E'_\nu\left\{S_\nu^2\right\}$$

從ツテ、証明スベキ結果ハ，次ノ如クシテ得ラレル：

$$b^2 = E\left\{S^2\right\} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\left\{E_\nu\right\} E'_\nu\left\{S^2\right\} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\left\{E_\nu\right\} E'_\nu\left\{S_\nu^2\right\}$$

$$\geqq c^2 b^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\left\{E_\nu\right\} = c^2 b^2\, Pr.\left\{T > c\,b\right\}.$$

——（証　終）——

注意３：　定理２ハ聯鎖級數ニ関シテ述ベタ。勿論，有限個ノ和ノ場合ニハ $Pr.\left\{T_n > c\,b_n\right\} \leqq 1/c^2$ ガ成立ツ。

注意４：　前記ノ *Kolmogoroff* ノ論文ニハ，(5) 以外ノイロイロナ不等式ガ揭ゲラアツテ、ソレラハ皆必要ナモノデアツタ。從ツテ、各々モ (9) ニ滿足セズ，更ニソレラニ對應スルモノガ定理２ノ條件ノモトデ得ラレルカドウカ，當ツテ見ルコトハ無畋デナイト思フ。

〔4〕 特性函數ノ方法　相互ニ独立ナ確率変数ノ和 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ ノ特性函數ハ，各々ノ特性函数ノ乗積ニナル。即チ スベテノ $-\infty<t<\infty$ ニ對シテ

$$(14)\quad E\left\{e^{it(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)}\right\}$$
$$=E\left\{e^{itX_1}\right\}E\left\{e^{itX_2}\right\}\cdots E\left\{e^{itX_n}\right\}$$

コノ事実が，独立級数ノ研究ヲ容易ナラシメル。(14) ハ X_1，X_2，……，X_n が相互ニ独立ノタメノ必要條件ニ止ラズ，実ハ充分條件デモアル．(Kac) 即チ (14) ナル関係ノ成立スルモノハ相互ニ独立ナモノニ限ル。従ッテ、(14) ソノモノハドウニモ出来ナイ。コレヲ聯鎖ナモノニ拡張出来ナイ。シカシ特性函数ヲ利用スル方法及ビ結果ヲ吟味シテ見レバ，或ル結果ヲ導クノニハ，(14) ソノモノが必要デハナイノデアル。

S. Bernstein ハ，聯鎖級數ノ有名ナ研究[4]ニ於テ、特性函数ヲ上述ノ見方カラ利用シ、聯鎖級數ニ関スル中心極限定理ヲ証明シタ。ソノ方法ハ，独立級数ニ関スル（特性函数ヲ利用シテノ）現在知ラレテ居ル Feller ト Cramér ノ方法ニ比ベルトモット発展ノ餘地がアル様ニ思ハレルノデアルが、ソレデモ相當ニ有效ナモノデアッ

---

(4) Sur l'extension du théoréme limite du calcul des probablités aux sommes de quantités dépendantes. Math. Ann. 97 コレヲ〔B〕デ引用スル。

テ、事實 Doeblin(5) ノ Markoff 聯鎖ノ最近ノ研究ニ於テモコレヲ援用シテ居ル。

---

(5) Sur les proprietes asymp. de mouvements régis par certains types de chaînes simples. Bullt. Math. Roumaine. (1937) コレヲ〔D〕デ引用スル。